Architecture des ordinateur

Cours 2 - Algèbre de Boole

Halim Djerroud (hdd@ai.univ-paris8.fr)

LIASD - Université Paris 8

Introduction

L'algèbre de Boole :

- Est un outil qui permet d'exprimer les effets qu'ont les circuits numériques.
- Permet de déterminer la meilleure façon de matérialiser (de construire) une fonction logique.
- Elle admet uniquement deux valeurs possibles : 0 et 1.
- Elle admet uniquement les opérateurs élémentaires suivantes : *Complement* , *OU* et *ET* .

Les valeurs possibles

Niveau logique 0	Niveau logique 1
0	1
FAUX	VRAI
BAS	HAUT
NON	OUI
ARRÊT	MARCHE
FERMÉ	OUVERT

Constantes et Variables Booléennes

L'algèbre booléenne se distingue principalement de l'algèbre par des variables et des constantes qui peuvent prendre uniquement deux valeurs possibles : 0 et 1

- Une variable booléenne est une grandeur qui peut prendre, à des moments différents, la valeur 1 ou 0
- Une constante booléenne est une grandeur qui peut prendre la valeur 1 ou 0 (la valeur ne peut être modifiée)

Table de vérité

- La table de vérité permet d'indiquer la réaction d'un circuit logique (sa valeur de sortie) aux diverses combinaisons de niveaux logiques appliqués aux entrées.
- Exemple :

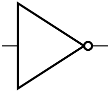
A	B	X
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

Opérateur NON (inverseur) *NOT*

- Si la variable A est soumise à l'opérateur *NOT* le résultat est donné par l'expression : $x = \bar{A}$

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

- Circuit inverseur :

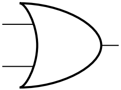


Opérateur OU (addition logique) OR , $+$

- Soit deux variables logiques A et B. Quand on combine A et B au moyen de l'addition logique, le résultat est donné par les expressions suivante : $x = A + B$, $x = A\ OR\ B$

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Circuit OR, OU, $+$:

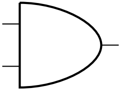


Opérateur ET (multiplication logique) *and* , .

- Soit deux variables logiques A et B. Quand on combine A et B au moyen de la multiplication logique, le résultat est donné par les expressions suivante : $x = A.B$, $x = A\ AND\ B$

A	B	$A.B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Circuit AND, ET, . :

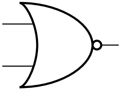


Opérateur NON OU (NOT OR) *NOR*

- $x = A\ NOR\ B = NOT\ (\ A\ OR\ B\ )$

A	B	$A\ NOR\ B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- Circuit *NOR*, *NON OU* :

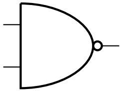


Opérateur NON ET (NOT AND) *NAND*

- $x = A\ NAND\ B = NOT\ (\ A\ AND\ B\ )$

A	B	$A\ NAND\ B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Circuit *NAND*, *NON ET*, . :

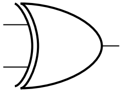


Opérateur OU exclusif *XOR*

- $x = A\ XOR\ B = A \oplus B$

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Circuit *XOR*, $\oplus$:



Axiomes et Postulats

Une algèbre de Boole est constituée de :

- Un ensemble E avec deux éléments particuliers : 0 et 1 (correspondant respectivement à $FAUX$ et $VRAI$).
- Deux opérations binaires sur E : $+$ et $.$ (correspondant respectivement au OU et ET logiques).
- Une opération unaire sur E : $\bar{}$ (correspondant à la négation logique).

Axiomes et Postulats

On acceptera les postulats suivant :

- $0 \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$
- $1 \cdot 1 = 1$
- $\bar{0} = 1$
- $1 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 0 + 1 = 1$
- $0 + 0 = 0$
- $\bar{1} = 0$

Axiomes et Postulats

De ces postulats découlent les axiomes suivants. Soient a, b et c des éléments de E :

Commutativité	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativité	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivité	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
Élément neutre	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Complémentation	$a + \bar{a} = 1$	$a \cdot \bar{a} = 0$

Principe de dualité

Chaque axiome et chaque postulat possède un équivalent dual, où les éléments 0 sont remplacés par des 1, les 1 par des 0, les ($\cdot$) par des ($+$) et vice et versa. Aussi, tout théorème de l'algèbre de Boole a son équivalent dual. Le théorème dual est formulé à partir du théorème de base en remplaçant les éléments 0 par des 1 (respectivement, les 1 par des 0) et les ($\cdot$) par des ($+$) (respectivement, les ($+$) par des ($\cdot$))

Principe de dualité (Exemple)

Soit a élément de E, alors $a + a = a$.

$a + a = 1 \cdot a + 1 \cdot a$ //d'après l'axiome de l'élément neutre.
$a + a = a \cdot (1 + 1)$ // d'après l'axiome de distributivité.
$a + a = a \cdot 1$ //d'après le postulat (5).
$a + a = a$ // d'après l'axiome de l'élément neutre.
Aussi, on peut immédiatement déduire de ce théorème son dual, ce dernier s'exprimant comme suit : Soit a élément de E, alors $a \cdot a = a$

Principe de dualité (Exemple)

Soit a élément de E, alors $a \cdot a = a$.

$a \cdot a = (0 + a) \cdot (0 + a)$ //d'après l'axiome de l'élément neutre.
$a \cdot a = a + (0 \cdot 0)$ // d'après l'axiome de distributivité.
$a \cdot a = a + 0$ //d'après le postulat (1).
$a \cdot a = a$ // d'après l'axiome de l'élément neutre.

Théorèmes de base

Nom	Formume 1	Formule 2
1) Involution	$\bar{\bar{a}} = a$	-
2) Idempotence	$a + a = a$	$a \cdot a = a$
3) Élément absorbant	$a + 1 = 1$	$a \cdot 0 = 0$
4) Absorption	$a + a \cdot b = a$	$a \cdot (a + b) = a$
5) de Morgan	$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$
6) -	$a + \bar{a} \cdot b = a + b$	$a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$

Preuves :

Pour certains de ces théorèmes, nous allons donner ici la démonstration d'une des deux formes, l'autre pouvant être déduite par le principe de dualité.

Preuves (3) :

Soit a élément de E, alors $a + 1 = 1$

$a + 1 = a + (a + \bar{a})$ // d'après l'axiome de complémentation
$a + 1 = (a + a) + \bar{a}$ // d'après l'axiome de l'associativité
$a + 1 = a + \bar{a}$ // d'après le théorème (2)
$a + 1 = 1$ // d'après l'axiome de complémentation

Preuves (4) :

Soit a élément de E, alors $a \cdot (a + b) = a$

$a \cdot (a + b) = (a + 0) \cdot (a + b)$ // d'après l'axiome de l'élément neutre

$a \cdot (a + b) = a + (0 \cdot b)$ // d'après l'axiome de la distributivité

$a \cdot (a + b) = a + 0$ // d'après le théorème (3)

$a \cdot (a + b) = a$ // d'après l'axiome de l'élément neutre

Preuves (6) :

Soit a élément de E, alors $a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$

$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + 0) \cdot (\bar{a} + b)$ // élément neutre
$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + b \cdot \bar{b}) \cdot (\bar{a} + b)$ // complémentation
$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + b) \cdot (a + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + b)$ // distributivité
$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + b)$ // théorème (2)
$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + b) \cdot (a + \bar{b}) \cdot (a + b) \cdot (\bar{a} + b)$ // commutativité
$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + b \cdot \bar{b}) \cdot (a \cdot \bar{a} + b)$ // distributivité (2 fois)
$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + 0) \cdot (0 + b)$ // complémentation (2 fois)
$a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$ // élément neutre (2 fois)

Décomposition de Shannon

- Décomposition de Shannon :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{x}_1 f(0, x_2, ..., x_n) + x_1 f(1, x_2, ..., x_n)$$

Génération d'expressions logiques

La table de vérité permet d'exprimer une fonction logique :

A	B	$F(A,B)$
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

Générer une l'expression logique correspondante :

- Sous forme de sommes de produits
- Sous forme de produits de sommes

Exemple

Soit un système logique qui exprime la magorité :

N°	A	B	C	$F(A, B)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Somme De Produits (SDP)

- Sous forme de sommes de produits (SDP) :

$$F(A, B, C) = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

$$F(A, B, C) = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$F(A, B, C) = \sum m(3, 5, 6, 7)$$

Produit De Sommes (PDS)

- Sous forme de produits de sommes (PDS)

$$F(A,B,C) = (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+C)(\bar{A}+B+\bar{C})(A+\bar{B}+\bar{C})$$

$$F(A,B,C) = m_0 m_1 m_2 m_4$$

$$F(A,B,C) = \prod m(0,1,2,4)$$