Architecture des systèmes numériques et informatiques

Cours 2 - Algèbre de Boole

Halim Djerroud

LISV Laboratoire d'ingénierie des systèmes de Versailles
UVSQ université PARIS-SACLAY

révision : 1.2

Introduction à l'algèbre de Boole

- Outil pour décrire le comportement des circuits numériques.
- Sert à optimiser la réalisation matérielle d'une fonction logique.
- Ne manipule que deux valeurs possibles : 0 (faux) et 1 (vrai).
- Repose sur trois opérateurs élémentaires : Complément ($\bar{a}$), OU ($a + b$), ET ($a \cdot b$).

Les valeurs possibles

Interprétation des niveaux logiques

En algèbre de Boole, une variable ne peut prendre que deux valeurs : 0 et 1. Ces valeurs peuvent être interprétées de plusieurs façons :

Niveau logique 0	Niveau logique 1
0	**1**
FAUX	VRAI
BAS	HAUT
NON	OUI
ARRÊT	MARCHE
FERMÉ	OUVERT

Constantes et variables booléennes

Rappel

En algèbre de Boole, toute grandeur ne prend que deux valeurs possibles : 0 (faux) ou 1 (vrai).

- Une variable booléenne peut changer de valeur au cours du temps : $A \in \{0, 1\}$.
- Une constante booléenne garde toujours la même valeur : 0 ou 1.

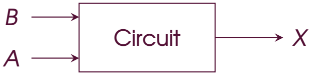
Variable	Constante
$A = 0 \Rightarrow A = 1$	$1 \Rightarrow 1$ (fixe)

Table de vérité

Définition

Une table de vérité décrit la valeur de sortie d´un circuit logique pour toutes les combinaisons possibles de ses entrées.

A	B	X
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

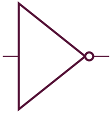


Opérateur NON (inverseur) *NOT*

- Si la variable A est soumise à l'opérateur *NOT* le résultat est donné par l'expression : $x = \bar{A}$

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

- Circuit inverseur :

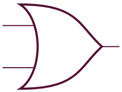


Opérateur OU (addition logique) OR , $+$

- Soit deux variables logiques A et B. Quand on combine A et B au moyen de l'addition logique, le résultat est donné par les expressions suivante : $x = A + B$, $x = A\ OR\ B$

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Circuit OR, OU, $+$:

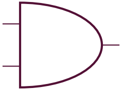


Opérateur ET (multiplication logique) *and* , .

- Soit deux variables logiques A et B. Quand on combine A et B au moyen de la multiplication logique, le résultat est donné par les expressions suivante : $x = A.B$, $x = A$ AND B

A	B	$A.B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Circuit *AND*, *ET*, . :

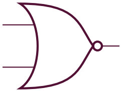


Opérateur NON OU (NOT OR) *NOR*

- $x = A\ NOR\ B = NOT\ (\ A\ OR\ B\ )$

A	B	$A\ NOR\ B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- Circuit *NOR*, *NON OU* :

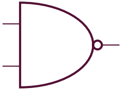


Opérateur NON ET (NOT AND) *NAND*

- $x = A\ NAND\ B = NOT\ (\ A\ AND\ B\ )$

A	*B*	*A NAND B*
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Circuit *NAND*, *NON ET*, . . :

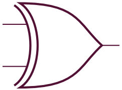


Opérateur OU exclusif *XOR*

- $x = A \ XOR \ B = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Circuit *XOR*, $\oplus$:



Axiomes et Postulats

Une algèbre de Boole est constituée de :

- Un ensemble E avec deux éléments particuliers : 0 et 1 (correspondant respectivement à *FAUX* et *VRAI*).
- Deux opérations binaires sur E : $+$ et . (correspondant respectivement au *OU* et *ET* logiques).
- Une opération unaire sur E : $\bar{\ }$(correspondant à la négation logique).

Axiomes et Postulats

On acceptera les postulats suivant :

- $0 \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$
- $1 \cdot 1 = 1$
- $\bar{0} = 1$
- $1 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 0 + 1 = 1$
- $0 + 0 = 0$
- $\bar{1} = 0$

Axiomes et Postulats

De ces postulats découlent les axiomes suivants. Soient a, b et c des éléments de E :

Commutativité	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativité	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivité	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
Élément neutre	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Complémentation	$a + \bar{a} = 1$	$a \cdot \bar{a} = 0$

LISV Laboratoire d'ingénierie des systèmes de Versailles | UVSQ université PARIS-SACLAY

Principe de dualité

Chaque axiome et chaque postulat possède un équivalent dual, où les éléments 0 sont remplacés par des 1, les 1 par des 0, les ($\cdot$) par des (+) et vice et versa. Aussi, tout théorème de l'algèbre de Boole a son équivalent dual. Le théorème dual est formulé à partir du théorème de base en remplaçant les éléments 0 par des 1 (respectivement, les 1 par des 0) et les ($\cdot$) par des (+) (respectivement, les (+) par des ($\cdot$))

Principe de dualité (Exemple)

Soit a élément de E, alors $a + a = a$.

$$\begin{aligned} a + a &= 1 \cdot a + 1 \cdot a && \text{(axiome de l'élément neutre)} \\ &= a \cdot (1 + 1) && \text{(axiome de distributivité)} \\ &= a \cdot 1 && \text{(postulat (5))} \\ &= a && \text{(axiome de l'élément neutre)} \end{aligned}$$

Aussi, on peut immédiatement déduire de ce théorème son dual, ce dernier s'exprimant comme suit :

$$a \cdot a = a, \quad \text{pour tout } a \in E$$

Principe de dualité (Exemple)

Soit a élément de E, alors $a \cdot a = a$.

$a \cdot a = (0 + a) \cdot (0 + a)$ //d'après l'axiome de l'élément neutre.
$a \cdot a = a + (0 \cdot 0)$ // d'après l'axiome de distributivité.
$a \cdot a = a + 0$ //d'après le postulat (1).
$a \cdot a = a$ // d'après l'axiome de l'élément neutre.

Théorèmes de base

Nom	Formule 1	Formule 2
1) Involution	$\bar{\bar{a}} = a$	--
2) Idempotence	$a + a = a$	$a \cdot a = a$
3) Élément absorbant	$a + 1 = 1$	$a \cdot 0 = 0$
4) Absorption	$a + a \cdot b = a$	$a \cdot (a + b) = a$
5) De Morgan	$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$
6) ---	$a + \bar{a} \cdot b = a + b$	$a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$

Preuves :

Pour certains de ces théorèmes, nous allons donner ici la démonstration d'une des deux formes, l'autre pouvant être déduite par le principe de dualité.

Preuves (3) :

Soit a élément de E, alors $a + 1 = 1$

$a + 1 = a + (a + \bar{a})$ // d'après l'axiome de complémentation
$a + 1 = (a + a) + \bar{a}$ // d'après l'axiome de l'associativité
$a + 1 = a + \bar{a}$ // d'après le théorème (2)
$a + 1 = 1$ // d'après l'axiome de complémentation

Preuves (4) :

Soit a élément de E, alors $a \cdot (a + b) = a$

$a \cdot (a + b) = (a + 0) \cdot (a + b)$ // d'après l'axiome de l'élément neutre
$a \cdot (a + b) = a + (0 \cdot b)$ // d'après l'axiome de la distributivité
$a \cdot (a + b) = a + 0$ // d'après le théorème (3)
$a \cdot (a + b) = a$ // d'après l'axiome de l'élément neutre

Preuves (6) :

Soit a élément de E, alors $a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$

$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + 0) \cdot (\bar{a} + b)$ // élément neutre
$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + b \cdot \bar{b}) \cdot (\bar{a} + b)$ // complémentation
$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + b) \cdot (a + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + b)$ // distributivité
$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + b)$ // théorème (2)
$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + b) \cdot (a + \bar{b}) \cdot (a + b) \cdot (\bar{a} + b)$ // commutativité
$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + b \cdot \bar{b}) \cdot (a \cdot \bar{a} + b)$ // distributivité (2 fois)
$a \cdot (\bar{a} + b) = (a + 0) \cdot (0 + b)$ // complémentation (2 fois)
$a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$ // élément neutre (2 fois)

Décomposition de Shannon

Définition

Pour toute fonction booléenne $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on peut écrire :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x}_1\, f(0, x_2, \ldots, x_n) \;+\; x_1\, f(1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Permet de décomposer une fonction en deux cas : $x_1 = 0$ et $x_1 = 1$.
- Sert de base à la **réalisation matérielle** (circuit logique).

Génération d'expressions logiques

La table de vérité permet d'exprimer une fonction logique :

A	B	$F(A, B)$
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

Générer une l'expression logique correspondante :

- Sous forme de sommes de produits
- Sous forme de produits de sommes

Exemple

Soit un système logique qui exprime la magorité :

$N\circ$	A	B	C	$F(A,B)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Somme De Produits (SDP)

- Sous forme de sommes de produits (SDP) :

$$F(A, B, C) = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

$$F(A, B, C) = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$F(A, B, C) = \sum m(3, 5, 6, 7)$$

Produit De Sommes (PDS)

- Sous forme de produits de sommes (PDS)

$$F(A,B,C) = (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+C)(\bar{A}+B+\bar{C})(A+\bar{B}+\bar{C})$$

$$F(A,B,C) = m_0 m_1 m_2 m_4$$

$$F(A,B,C) = \prod m(0,1,2,4)$$

Exemple concret : fonction de majorité

Problème

On définit une fonction logique $F(A, B, C)$ telle que :

$$F = 1 \quad \text{si au moins deux variables parmi } A, B, C \text{ valent } 1.$$

- Trois entrées : A, B, C.
- Une sortie : F.
- Application typique : circuits de vote, redondance matérielle.

Table de vérité de la fonction majorité

A	B	C	$F(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Forme somme de produits (SDP)

À partir des lignes où $F = 1$ (mintermes) :

$$F(A, B, C) = \bar{A}BC \; + \; A\bar{B}C \; + \; AB\bar{C} \; + \; ABC$$

$$F(A, B, C) = m_3 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum m(3, 5, 6, 7)$$

À partir des lignes où $F = 0$ (maxtermes) :

$$F(A, B, C) = (A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + C)$$

$$F(A, B, C) = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4 = \prod M(0, 1, 2, 4)$$

Simplification de la fonction majorité

Expression initiale (SDP)

$$F(A, B, C) = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

Simplification :

$$\begin{aligned}
F(A, B, C) &= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC \\
&= (\bar{A}BC + ABC) + (A\bar{B}C + ABC) + (AB\bar{C} + ABC) \\
&= BC(\bar{A} + A) + AC(\bar{B} + B) + AB(\bar{C} + C) \\
&= BC \cdot 1 + AC \cdot 1 + AB \cdot 1 \\
&= BC + AC + AB
\end{aligned}$$

LISV Laboratoire d'ingénierie des systèmes de Versailles | UVSQ université PARIS-SACLAY

Réalisation du circuit logique